अध्याय 10

सरल रेखाएँ

10.1 समग्र अवलोकन (Overviews)

10.1.1 *रेखा की ढाल (Slope of a line)*

यदि कोई रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ वामावर्त दिशा में कोण θ बनाती है, तो $\tan\theta$ का मान रेखा की ढाल कहलाता है और इसे m से निर्दिष्ट करते हैं।

बिंदु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरने वाली रेखा का ढाल

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ से प्राप्त होता है।

10.1.2 *दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two lines):-* दो रेखाएँ, जिनके ढाल m_1 तथा m_2 हैं, के बीच का कोण θ हमें

$$\tan\theta = \pm\frac{(m_1 - m_2)}{1 + m_1 m_2}$$ से प्राप्त होता है।

यदि रेखाएँ समांतर हैं, तो $m_1 = m_2$.

यदि रेखाएँ एक दूसरे पर लंब है, तो $m_1 m_2 = -1$.

10.1.3 *तीन बिंदुओं की संरेखता (Collinearity of three points):-* यदि तीन बिंदु $P(h, k)$, $Q(x_1, y_1)$ एवं $R(x_2, y_2)$ इस प्रकार हैं कि PQ का ढाल = QR का ढाल अर्थात् $\frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

अथवा $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$ तब वे तीनों बिंदु संरेख कहलाते हैं।

10.1.4 *रेखा के समीकरण के विविध रूप (Various forms of the equation of a line)*

(i) यदि कोई रेखा x-अक्ष के समांतर एवं a दूरी पर स्थित है, तब रेखा का समीकरण $y = \pm a$ होता है।

(ii) यदि कोई रेखा y-अक्ष के समांतर है एवं y अक्ष से b दूरी पर है, तो रेखा का समीकरण $x = \pm b$ होता है।

(iii) बिंदु-ढाल रूप : बिंदु (x_0, y_0) से गुजरने वाली रेखा, जिसकी ढाल m हो, उसका समीकरण $y - y_0 = m(x - x_0)$ से प्राप्त होता है।

(iv) दो–बिंदु रूप : दो बिंदुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ होता है।

(v) ढाल–अंत: खंड रूप : y-अक्ष पर अंत:खंड c काटने तथा ढाल m वाली रेखा का समीकरण $y = mx + c$ है। ध्यान दीजिए कि c का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक होगा यदि y-अक्ष पर अंत:खंड क्रमश: धनात्मक अथवा ऋणात्मक भाग पर बना है।

(vi) अंत: खंड रूप: x- अक्ष एवं y-अक्ष पर क्रमश: a तथा b अंत:खंड बनाने वाली रेखा का समीकरण $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

(vii) अभिलम्ब रूप: मान लीजिए कि निम्नलिखित आंकड़ों वाली एक रेखा जो ऊर्ध्वाधर नहीं है,

(a) मूल बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई p

(b) अभिलम्ब द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाया गया कोण ω,

तब रेखा का समीकरण $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ है।

10.1.5 *रेखा का व्यापक समीकरण*

$Ax + By + C = 0$ के रूप वाला समीकरण जहाँ A और B एक साथ शून्य नहीं हैं, रेखा का व्यापक समीकरण कहलाता है।

Ax + By + C = 0 के विभिन्न रूप:

रेखा के व्यापक रूप को विभिन्न रूपों में परिवर्तित किया जा सकता है, जैसा कि नीचे दिया हुआ है:

(i) ढाल–अंत:खंड रूप : यदि $B \neq 0$, तब $Ax + By + C = 0$ को

$y=\dfrac{-A}{B}x+\dfrac{-C}{B}$ अथवा $y = mx + c$ जहाँ $m=\dfrac{-A}{B}$ तथा $c=\dfrac{-C}{B}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि $B = 0$, तब $x = \dfrac{-C}{A}$ यह एक उर्ध्वाधर रेखा है जिसकी ढाल अपरिभाषित है और x-अंत:खंड $\dfrac{-C}{A}$ है।

(ii) अंत:खंड रूप: यदि $C \neq 0$, तब $Ax + By + C = 0$ को, $\dfrac{x}{\frac{-C}{A}} + \dfrac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$ अथवा $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,

जहाँ $a = \frac{-C}{A}$ तथा $b = \frac{-C}{B}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

यदि C = 0, तब $Ax + By + C = 0$ को $Ax + By = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक ऐसी रेखा का समीकरण है जो मूल बिंदु से गुजरती है और इसलिए दोनों अक्षों पर इसके अंत:खंड शून्य हैं।

(iii) अभिलम्ब रूप: समीकरण $Ax + By + C = 0$ का अभिलम्ब रूप

$x \cos \omega + y \sin \omega = p$ है जहाँ

$$\cos \omega = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \omega = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ एवं } p = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ हैं।}$$

[*टिप्पणी : यहाँ पर चिह्नों के उचित चयन की आवश्यकता है ताकि p हमेशा धनात्मक रहे*।]

10.1.6 *एक बिंदु की रेखा से दूरी:*

बिंदु P (x_1, y_1) की रेखा $Ax + By + C = 0$ से लंबवत् दूरी (अथवा दूरी), $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ होती है।

दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी

दो समांतर रेखाओं $y = mx + c_1$ एवं $y = mx + c_2$ के बीच की दूरी $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ होती है।

10.1.7 *बिंदुपथ एवं बिंदुपथ का समीकरण*

किन्हीं दी हुई शर्तों के अंतर्गत किसी बिंदु के भ्रमण से बना हुआ वक्र, उस बिंदु का बिंदुपथ कहलाता है। निर्देशांक (h, k), वाले बिंदु P का बिंदुपथ ज्ञात करने के लिए h एवं k को सम्मिलित करने वाली शर्त की अभिव्यक्ति कीजिए। यदि कोई चर है तो उसे विलुप्त कीजिए और P का बिंदुपथ ज्ञात करने के लिए अंत में h को x से एवं k को y से प्रतिस्थापित कीजिए।

10.1.8 ***दो रेखाओं का प्रतिच्छेदन:*** दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(i) प्रतिच्छेद करती हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

(ii) समांतर एवं भिन्न-भिन्न होती हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(iii) संपाती होती हैं, यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

टिप्पणी:

- बिंदु (x_1, y_1) एवं (x_2, y_2) किसी रेखा $ax + by + c = 0$ के एक ही दिशा या विपरीत दिशाओं में स्थित होते हैं यदि $ax_1 + by_1 + c$ एवं $ax_2 + by_2 + c$ के चिह्न क्रमशः समान अथवा विपरीत होते हैं।
- दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + 2 = 0$ एक दूसरे पर लंब होती हैं यदि $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- दो रेखाएँ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से गुजरने वाली किसी रेखा का समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 + k(ax_2 + by_2 + c_2) = 0$ है। k का मान प्रश्न में दी हुई अतिरिक्त शर्त का उपयोग करते हुए ज्ञात किया जाता है।

10.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय उदाहरण (S.A.)

उदाहरण 1 बिंदु (2, 3) से गुजरने वाली तथा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ दी हुई रेखा का ढाल $m = \tan\theta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है तथा दिया हुआ बिंदु (2, 3) है। इसलिए बिंदु–ढाल सूत्र के उपयोग से रेखा का समीकरण

$y - 3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ अथवा $x - \sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 2) = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2 एक ऐसी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके ऊपर मूल बिंदु से खींचे गये लम्ब–खंड की लंबाई 4 इकाई है और लंब खंड का धनात्मक x-अक्ष के साथ झुकाव 30° है।

हल रेखा के समीकरण का लंब रूप $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ है। यहाँ $p = 4$ and $\omega = 30°$

इसलिए दी हुई रेखा का समीकरण

$x\cos 30° + y\sin 30° = 4$ है।

$$x\frac{\sqrt{3}}{2} + y\frac{1}{2} = 4 \quad \text{अथवा} \quad \sqrt{3}x + y = 8$$

उदाहरण 3 सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सरल रेखा का समीकरण $Ax + By + C = 0$ के रूप में होता है जहाँ A, B तथा C अचर हैं।

हल कोई दी हुई सरल रेखा या तो y-अक्ष को काटती है या y-अक्ष के समांतर होती है या y-अक्ष के समांती होती है। हम जानते है कि y-अक्ष को काटने वाली (जिसका y अंतः खंड होता है) रेखा

का समीकरण $y = mx + b$ के रूप का होता है। इसके अतिरिक्त यदि रेखा y-अक्ष के समांतर या संपाती है तो इसका समीकरण $x = x_1$ के रूप का होता है, जहाँ संपाती होने की स्थिति में $x_1 = 0$ लिया जाता है। ये दोनों ही समीकरण प्रश्न में दिये हुए समीकरण के रूप में सन्निहित हैं अत: इस प्रकार वांछित परिणाम सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 4 रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब एवं बिन्दु $(1, 2)$ से जाने वाले रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब जिस रेखा का समीकरण ज्ञात करना है उसका ढाल m है। दी हुई रेखा $y = (-1)\,x - 7$ का ढाल -1 है। इसलिए रेखाओं के लम्ब होने की शर्त का उपयोग करते हुए हम $m \times (-1) = -1$ या $m = 1$ (क्यों) प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार रेखा का वांछित समीकरण $y - 1 = (1)\,(x - 2)$ या $y - 1 = x - 2$ या $x - y - 1 = 0$ है।

उदाहरण 5 रेखा $3x + 4y = 9$ एवं $6x + 8y = 15$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल रेखा $3x + 4y = 9$ एवं $6x + 8y = 15$ के समीकरणों को पुन:

$$3x + 4y - 9 = 0 \quad \text{एवं} \quad 3x + 4y - \frac{15}{2} = 0$$ के रूप में लिखा जा सकता है।

क्योंकि इन रेखाओं का ढाल एक समान है और इसलिए ये एक दूसरे के समांतर हैं। इसलिए इन रेखाओं के बीच की दूरी

$$\left|\frac{9 - \frac{15}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \frac{3}{10} \text{ है।}$$

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि चर रेखा $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ का अक्षों के बीच की दूरी के मध्य बिंदु का बिंदुपथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ है जहाँ p एक अचर है।

हल दी हुई रेखा के समीकरण को अंत:खंड रूप में परिवर्तित करने पर हम $\dfrac{x}{\frac{p}{\cos\alpha}} + \dfrac{y}{\frac{p}{\sin\alpha}} = 1$ प्राप्त करते हैं। यह रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष को जिन बिंदुओं पर काटती है उनके निर्देशांक क्रमश: $\left(\frac{p}{\cos\alpha}, 0\right)$ एवं $\left(0, \frac{p}{\sin\alpha}\right)$ प्राप्त होते हैं।

मान लीजिए, बिंदुओं $\frac{p}{\cos\alpha}, 0$ एवं $0, \frac{p}{\sin\alpha}$ को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु (h, k) है।

तब $h = \frac{p}{2\cos\alpha}$ एवं $k = \frac{p}{2\sin\alpha}$ (क्यों)

$\cos\alpha = \frac{p}{2h}$ एवं $\sin\alpha = \frac{p}{2k}$

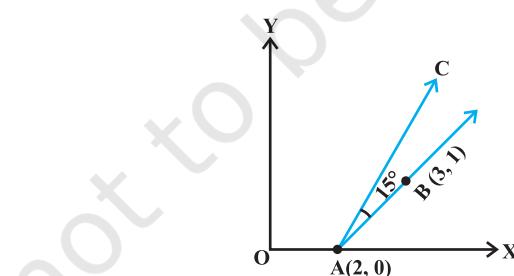
दोनों ओर वर्ग करके जोड़ने पर

$\frac{p^2}{4h^2} + \frac{p^2}{4k^2} = 1$ या $\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{4}{p^2}$

इसलिए वांछित बिंदु पथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{p^2}$ है।

उदाहरण 7 यदि दो बिंदुओं A(2, 0) तथा B(3, 1) को मिलाने वाली रेखा को वामावर्त दिशा में A के इर्द-गिर्द 15° के कोण से घुमाया जाता है। रेखा का नई अवस्था में समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: रेखा AB का ढाल $\frac{1-0}{3-2} = 1$ अथवा 45° है (क्यों) (आकृति को देखिए)

15° से घुमाने के बाद नई अवस्था में रेखा AC का ढाल $\tan 60° = \sqrt{3}$ है।

आकृति 10.1

इसलिए नई रेखा AC का समीकरण

$y - 0 = \sqrt{3}(x-2)$ अथवा $y - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$ है।

दीर्घ उत्तरीय उदाहरण (L.A.)

उदाहरण 8 यदि बिंदु A(3, 2) से जाने वाली रेखा का ढाल $\frac{3}{4}$ है, तो रेखा पर बिंदु A से 5 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल बिंदु (3, 2) से जाने वाली एवं ढाल (slope) $\frac{3}{4}$ वाली रेखा का समीकरण

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 3)$$

या $4y - 3x + 1 = 0$ है (1)

मान लीजिए कि बिंदु (h, k) रेखा पर इस प्रकार है कि

$$(h - 3)^2 + (k - 2)^2 = 25 \quad (2) \quad \text{(क्यों)}$$

और

$$4k - 3h + 1 = 0 \text{ भी प्राप्त है} \quad (3) \quad \text{(क्यों)}$$

अथवा $$k = \frac{3h-1}{4} \quad (4)$$

k का मान (2) में रखने पर

$$25h^2 - 150h - 175 = 0 \quad \text{(कैसे?)}$$

या $$h^2 - 6h - 7 = 0$$

या $$(h + 1)(h - 7) = 0 \Rightarrow h = -1, h = 7$$

h के इन मानों को (4) में रखने पर हम $k = -1$ और $k = 5$ प्राप्त करते हैं। इसलिए वांछित बिंदुओं के निर्देशांक (–1, –1) या (7, 5) हैं।

उदाहरण 9 रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली अन्य रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ पर लम्ब उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ का प्रतिच्छेद बिंदु ज्ञात करते हैं जो कि (– 1, – 1) है। साथ ही रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ का ढाल $\frac{3}{5}$ है। इसलिए इस रेखा पर लम्ब उस रेखा का ढाल $\frac{-5}{3}$ है (क्यों)? अतः वांछित रेखा का समीकरण

$$y + 1 = \frac{-5}{3}(x + 1)$$

या $$5x + 3y + 8 = 0 \text{ है।}$$

विकल्प: रेखा $5x - 6y - 1 = 0$ एवं $3x + 2y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$5x - 6y - 1 + k(3x + 2y + 5) = 0 \text{ है} \qquad (1)$$

इस रेखा का ढाल $\dfrac{-(5+3k)}{-6+2k}$ है

साथ ही रेखा $3x - 5y + 11 = 0$ का ढाल $\dfrac{3}{5}$ है।

क्योंकि दोनों रेखाएँ एक दूसरे पर लंब हैं

इसलिए $\dfrac{-(5+3k)}{-6+2k} \times \dfrac{3}{5} = -1$

या $k = 45$

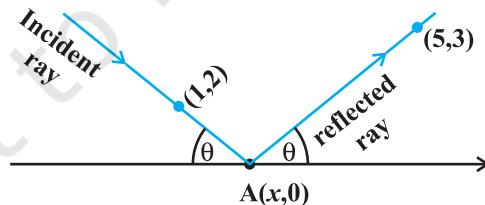
इसलिए वांछित रेखा का समीकरण

$$5x - 6y - 1 + 45\,(3x + 2y + 5) = 0$$

या $5x + 3y + 8 = 0$ है।

उदाहरण 10 बिंदु $(1, 2)$ से आने वाली प्रकाश की किरण x-अक्ष पर बिंदु A से परावर्तित होने के पश्चात् बिंदु $(5, 3)$ से गुजरती है। बिंदु A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए आपतित किरण x-अक्ष के जिस बिंदु A से टकराती है उसके निर्देशांक $(x, 0)$ हैं। आकृति के अनुसार परावर्तित किरण का ढाल

$$\tan\theta = \frac{3}{5-x} \text{ हैं} \qquad (1)$$

आकृति 10.2

साथ ही आपतित किरण का ढाल

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{-2}{x-1} \qquad \text{(क्यों?)}$$

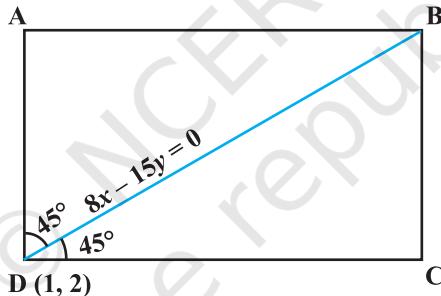
या $$-\tan\theta = \frac{-2}{x-1} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) को हल करने पर

$$\frac{3}{5-x} = \frac{2}{x-1} \quad \text{या} \quad x = \frac{13}{5}$$

अत: बिंदु A के वांछित निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ हैं।

उदाहरण 11 यदि किसी आयत का एक विकर्ण रेखा $8x - 15y = 0$ के साथ है और इसका एक शीर्ष (1, 2), पर है तो इस शीर्ष से जाने वाली आयत की भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि ABCD दिया हुआ आयत है और (1, 2) शीर्ष D के निर्देशांक हैं। हम भुजा DC एवं AD का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं।

आकृति 10.3

दिया हुआ है कि BD रेखा $8x - 15y = 0$ के साथ स्थित है इसलिए इसका ढाल $\frac{8}{15}$ (क्यों)? BD द्वारा AD एवं AC के साथ निर्मित कोण 45° है (क्यों) मान लीजिए DC का ढाल m है।

तब $$\tan 45° = \frac{m - \frac{8}{15}}{1 + \frac{8m}{15}} \qquad \text{(क्यों?)}$$

या $$15 + 8m = 15m - 8$$

या $$7m = 23 \Rightarrow m = \frac{23}{7}$$

इसलिए भुजा DC का समीकरण

$$y - 2 = \frac{23}{7}(x - 1) \text{ या } 23x - 7y - 9 = 0 \text{ है।}$$

इसी प्रकार दूसरी भुजा AD का समीकरण

$$y - 2 = \frac{-7}{23}(x - 1) \text{ या } 7x + 23y - 53 = 0 \text{ है।}$$

वस्तुनिष्ठीय प्रश्न

उदाहरण संख्या 12 से 20 तक प्रत्येक के चार विकल्प हैं जिनमें से केवल एक विकल्प सही है। सही विकल्प का चयन कीजिए।

उदाहरण 12 x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ रेखा $x - y + 3 = 0$ का झुकाव है:

(A) 45° (B) 135° (C) – 45° (D) –135°

हल (A) सही उत्तर है। दी हुई रेखा के समीकरण को पुन: $y = x + 3$ के रूप में लिखा जा सकता है;

$\Rightarrow \quad m = \tan\theta = 1$, इसलिए $\theta = 45°$.

उदाहरण 13 दो रेखाएँ $ax + by = c$ एवं $a'x + b'y = c'$ एक दूसरे पर लंब हैं यदि

(A) $aa' + bb' = 0$ (B) $ab' = ba'$

(C) $ab + a'b' = 0$ (D) $ab' + ba' = 0$

हल सही उत्तर (A) है। रेखा $ax + by = c$ का ढाल $\frac{-a}{b}$ है और रेखा $a'x + b'y = c'$ का ढाल $\frac{-a'}{b'}$ है।

ये रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं यदि $\frac{-a}{b} \frac{-a'}{b'} = -1$ या $aa' + bb' = 0$ (क्यों?)

उदाहरण 14 बिंदु (1, 2) से गुजरने वाली एवं रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लम्ब उस रेखा का समीकरण है:

(A) $y - x + 1 = 0$ (B) $y - x - 1 = 0$

(C) $y - x + 2 = 0$ (D) $y - x - 2 = 0$.

हल: सही उत्तर (B) है। मान लीजिए कि रेखा का ढाल m है, तो बिंदु (1, 2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 2 = m(x - 1) \text{ होगा} \qquad (1)$$

साथ ही यह रेखा दी हुई रेखा $x + y + 7 = 0$ पर लंब है जिसका ढाल – 1 है (क्यों)

इसलिए हम $\quad m(-1) = -1$

या $\quad m = 1$ प्राप्त करते हैं

m का मान समीकरण (1) में रखने पर वांछित रेखा का समीकरण

$$y - 2 = x - 1$$

या $\quad y - x - 1 = 0$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 15 बिंदु P (1, – 3) की रेखा $2y - 3x = 4$ से दूरी है–

(A) 13 (B) $\frac{7}{13}\sqrt{13}$ (C) $\sqrt{13}$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही उत्तर (A) है। बिंदु P (1, – 3) की रेखा $2y - 3x - 4 = 0$ से दूरी, बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई के समान है जो कि $\left|\frac{2(-3)-3-4}{\sqrt{13}}\right| = \sqrt{13}$ है।

उदाहरण 16 बिंदु (2, 3) से रेखा $x + y - 11 = 0$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक है:

(A) (–6, 5) (B) (5, 6) (C) (–5, 6) (D) (6, 5)

हल सही विकल्प (B) है। मान लीजिए बिंदु (2, 3) से रेखा $x + y - 11 = 0$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (h, k) हैं। तब लंब रेखा का ढाल $\frac{k-3}{h-2}$ है। साथ ही दी हुई रेखा

$x + y - 11 = 0$ का ढाल -1 है। (क्यों?)

रेखाओं के परस्पर लंब होने की शर्त का उपयोग करने पर हम

$$\frac{k-3}{h-2}(-1) = -1 \qquad \text{(क्यों?)}$$

या $\quad k - h = 1$ प्राप्त करते हैं। (1)

क्योंकि बिंदु (h, k) दी हुई रेखा पर स्थित है

$$h + k - 11 = 0 \text{ अथवा } h + k = 11 \qquad (2)$$

(1) तथा (2) को हल करने पर हम $h = 5$ एवं $k = 6$ प्राप्त करते हैं। अत: लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक (5, 6) हैं।

उदाहरण 17 किसी रेखा द्वारा y-अक्ष पर काटा गया अंत:खंड, x-अक्ष पर काटे गये अंत: खंड से दोगुना है और यह रेखा बिंदु (1, 2) से जाती है। रेखा का समीकरण है:

(A) $2x + y = 4$ (B) $2x + y + 4 = 0$

(C) $2x - y = 4$ (D) $2x - y + 4 = 0$

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए कि रेखा x-अक्ष पर अंत:खंड a काटती है, तो यह y- अक्ष पर अंत:खंड $2a$ बनाएगी। इसलिए रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1 \text{ है।}$$

यह बिंदु (1, 2) से जाती है इसलिए हम $\frac{1}{a}+\frac{2}{2a}=1$ या $a=2$ प्राप्त करते हैं।

अत: वांछित रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \text{ या } 2x + y = 4 \text{ है।}$$

उदाहरण 18 एक रेखा बिंदु P(1, 2) से इस प्रकार जाती है कि अक्षों के बीच इसका अंत:खंड P पर दो समान भागों में विभाजित होता है। रेखा का समीकरण है:

(A) $x + 2y = 5$ (B) $x - y + 1 = 0$

(C) $x + y - 3 = 0$ (D) $2x + y - 4 = 0$

हल सही विकल्प (D) है। हम जानते हैं कि x–अक्ष एवं y–अक्ष पर क्रमश: a तथा b अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \text{ है।}$$

यहाँ पर $$1=\frac{a+0}{2} \text{ एवं } 2=\frac{0+b}{2},$$ (क्यों)

जिससे हम $a = 2$ एवं $b = 4$ प्राप्त करते हैं। अत: रेखा का वांछित समीकरण

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \text{ अथवा } 2x + y - 4 = 0 \text{ है।}$$

उदाहरण 19 बिंदु (4, – 13) का रेखा $5x + y + 6 = 0$ के सापेक्ष में परावर्तित बिंदु है:

(A) (– 1, – 14) (B) (3, 4) (C) (0, 0) (D) (1, 2)

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए बिंदु (4 –13) का रेखा $5x+y+6=0$ के सापेक्ष में परावर्तन (h, k) है। बिंदुओं (h, k) एवं (4, – 13) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिंदु

$$\frac{h+4}{2}, \frac{k-13}{2} \quad \text{है}$$

यह बिंदु दी हुई रेखा पर स्थित है, इसलिए हम

$$5\left(\frac{h+4}{2}\right) + \frac{k-13}{2} + 6 = 0$$

या $5h + k + 19 = 0$ प्राप्त करते हैं। (1)

साथ ही बिंदुओं (h, k) एवं $(4, -13)$ को मिलाने वाली रेखा का ढाल $\frac{k+13}{h-4}$ है। यह रेखा दी हुई रेखा

पर लंब है। अतः $(-5)\left(\frac{k+3}{h-4}\right) = -1$ (क्यों?)

$$5k + 65 = h - 4$$

या $h - 5k - 69 = 0$ (2)

(1) तथा (2), को हल करने पर हम $h = -1$ एवं $k = -14$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार दिए हुए बिंदु का परावर्तन, बिंदु $(-1, -14)$ है।

उदाहरण 20 एक बिंदु इस प्रकार भ्रमण करता है कि बिंदु (4, 0) से इसकी दूरी, रेखा $x = 16$ से इसकी दूरी का आधा है। बिंदु का बिन्दुपथ है–

(A) $3x^2 + 4y^2 = 192$ (B) $4x^2 + 3y^2 = 192$

(C) $x^2 + y^2 = 192$ (D) इनमें से कोई नहीं

हल सही विकल्प (A) है। मान लीजिए कि भ्रमण करने वाले बिंदु के निर्देशांक (h, k) हैं।

तब हम $$\sqrt{(h-4)^2 + k^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{h-16}{\sqrt{1^2+0}}\right|$$

प्राप्त करते हैं। (क्यों?)

$$(h-4)^2 + k^2 = \frac{1}{4}(h-16)^2$$

$$4(h^2 - 8h + 16 + k^2) = h^2 - 32h + 256$$

या $3h^2 + 4k^2 = 192$

अतः अभीष्ट बिंदुपथ $3x^2 + 4y^2 = 192$ है।

10.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. बिंदु (1, −2) से जाने वाली और अक्षों पर समान अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. बिंदु (5, 2) से जाने वाली एवं बिन्दु (2, 3) तथा (3, −1) को मिलाने वाली रेखा पर लंब, एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

3. रेखा $y = (2-\sqrt{3})(x+5)$ एवं $y = (2+\sqrt{3})(x-7)$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

4. एक रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंडों का योग 14 है और यह बिंदु (3, 4) से जाता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

5. रेखा $x + y = 4$ पर ऐसे बिंदु ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x + 3y = 10$ से 1 इकाई की दूरी पर स्थित है।

6. दर्शाइए कि रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ एवं $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ के बीच के कोण की स्पर्शज्या (टैंजेंट) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ है।

7. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एवं y-अक्ष के साथ 30° का कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. रेखा $2x + y = 5$ एवं $x + 3y + 8 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली और रेखा $3x + 4y = 7$ के समांतर सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. a तथा b के किन मानों के लिए, रेखा $ax + by + 8 = 0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंड एवं रेखा $2x - 3y + 6 = 0$ द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गये अंत:खंड लंबाई में समान हैं परंतु चिह्नों में विपरीत हैं।

10. यदि निर्देशांक अक्षों के बीच किसी रेखा का अंत:खंड बिंदु (−5, 4) द्वारा 1: 2 के अनुपात में विभाजित किया जाता है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

11. एक ऐसी सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिंदु से खींचे गये लंब की लंबाई 4 इकाई है और यह रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 120° का कोण बनाती है।
[**संकेत**: लंब रूप का प्रयोग कीजिए, यहाँ $\omega = 30°$.]

12. किसी समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की एक भुजा का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि उसके कर्ण का समीकरण $3x + 4y = 4$ है और कर्ण के सम्मुख शीर्ष (2, 2) है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

13. यदि किसी समबाहु त्रिभुज के आधार का समीकरण $x + y = 2$ है और शीर्ष बिंदु (2, – 1) है, तो त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

[**संकेत**: *बिंदु* (2, –1) *से रेखा पर खींचे गये लंब की लंबाई* (p) *ज्ञात कीजिए और* $p = l \sin 60°$ *का प्रयोग कीजिए जिसमें* l *त्रिभुज की भुजा की लंबाई है*]

14. एक चर रेखा किसी निश्चित बिंदु P से जाती है। बिंदुओं (2, 0), (0, 2) एवं (1, 1) से रेखा पर खींचे गये लंबों का बीजीय योग शून्य है। बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** मान लीजिए रेखा का ढाल m है। तब निर्धारित बिंदु P (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$ है। लम्ब दूरियों के बीजीय योग कों शून्य के बराबर लेते हुए, हम $y - 1 = m(x - 1)$ प्राप्त करते हैं, अत: $(x_1, y_1) = (1, 1)$]

15. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एक रेखा को किस दिशा में खींचा जाए ताकि रेखा $x + y = 4$ के साथ इसका प्रतिच्छेद बिंदु दिए हुए बिंदु से $\frac{\sqrt{6}}{3}$ की दूरी पर रहे।

16. एक सरल रेखा इस प्रकार घूमती है कि अक्षों पर इसके द्वारा काटे गये अंत:खंडों के व्युत्क्रमों का योग हमेंशा अचर है। दर्शाइए कि यह रेखा निर्धारित बिंदु से जाती है।

[**संकेत:** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ जहाँ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$ अचर $= \frac{1}{k}$ (मान लीजिए) $\Rightarrow \frac{k}{a} + \frac{k}{b} = 1$ रेखा एक निर्धारित बिंदु (k, k) से जाती है।]

17. एक रेखा बिंदु (–4, 3) से जाती है और अक्षों के बीच अंत:खंडित रेखा दिये हुए बिंदु द्वारा 5 : 3 के अनुपात में अंत: विभाजित होता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

18. रेखा $x - y + 1 = 0$ एवं $2x - 3y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली ऐसी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (3, 2) से $\frac{7}{5}$ की दूरी पर है।

19. यदि किसी तल में भ्रमण करने वाले एक बिंदु की अक्षों से दूरियों का योग 1 है, तो उस बिंदु का बिंदु पथ ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** दिया हुआ है, $|x| + |y| = 1$, जिससे वर्ग की चार भुजाएँ प्राप्त होती हैं]

20. दो रेखाएँ $y - \sqrt{3}|x| = 2$ के प्रतिच्छेद बिंदु से 5 इकाई की दूरी पर रेखाओं पर बिंदु क्रमश: P_1, P_2 स्थित हैं। P_1, P_2 से दी हुई रेखाओं के (बीच के) कोण का समद्विभाजक पर खींचे गये लंबों के पाद बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

[**संकेत:** $x \geq 0$ अथवा $x < 0$ के अनुसार रेखाएँ $y = \sqrt{3}x + 2$ एव $y = -\sqrt{3}x + 2$ हैं। इन रेखाओं के बीच y-अक्ष कोण समद्विभाजक है। इन रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से 5 इकाई की दूरी पर स्थित बिंदुओं P_1, P_2 से y-अक्ष पर खींचे गये लंबों के पाद बिंदु एक उभयनिष्ठ बिंदु के रूप में हैं। लंब के पाद बिंदु का y निर्देशांक $2 + 5\cos 30°$ है।]

21. यदि मूल बिंदु से रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ पर खींचे गये लंब की लंबाई P है और a^2, p^2, b^2 समांतर श्रेणी में है तो दर्शाइए कि $a^4 + b^4 = 0$.

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 22 से 41 तक प्रत्येक प्रश्न के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए :

22. एक रेखा y-अक्ष से –3 अंत:खंड काटती है और x-अक्ष के साथ बनाये गये कोण की स्पर्शज्या (टेजेंट) $\frac{3}{5}$ है, रेखा का समीकरण है:

(A) $5y - 3x + 15 = 0$ (B) $3y - 5x + 15 = 0$

(C) $5y - 3x - 15 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

23. एक रेखा अक्षों पर समान अंत:खंड काटती है तब उस रेखा का ढाल है:

(A) – 1 (B) 0 (C) 2 (D) $\sqrt{3}$

24. बिंदु (3, 2) से जाने वाली एवं रेखा $y = x$ पर लंब एक सरल रेखा का समीकरण है:

(A) $x - y = 5$ (B) $x + y = 5$ (C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

25. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एवं रेखा $y + x + 1 = 0$ पर लंब एक सरल रेखा का समीकरण है:

(A) $y - x + 1 = 0$ (B) $y - x - 1 = 0$

(C) $y - x + 2 = 0$ (D) $y - x - 2 = 0$

26. दो रेखाओं के अक्षों पर अंत:खंड क्रमश: $a, -b$ एवं $b, -a$, हैं। रेखाओं के बीच के कोण की स्पर्शज्या (टेंजेंट) है:

(A) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ (B) $\frac{b^2-a^2}{2}$

(C) $\frac{b^2-a^2}{2ab}$ (D) इनमें से कोई नहीं

27. यदि रेखा, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, बिन्दुओं (2, –3) एवं (4, –5), से गुजरती है, तो (a, b) का मान है:

(A) (1, 1) (B) (– 1, 1) (C) (1, – 1) (D) (– 1, –1)

28. रेखाओं $2x-3y+5=0$ एवं $3x+4y=0$ के प्रतिच्छेद बिंदु का रेखा $5x-2y=0$ से दूरी है–

(A) $\frac{130}{17\sqrt{29}}$ (B) $\frac{13}{7\sqrt{29}}$ (C) $\frac{130}{7}$ (D) इनमें से कोई नहीं।

29. रेखा $\sqrt{3}\ x+y=1$ के साथ 60° पर झुकी हुई एवं बिंदु (3, −2) से जाने वाली रेखाओं के समीकरण हैं:

(A) $y+2=0,\ \sqrt{3}x-y-2-3\sqrt{3}=0$

(B) $x-2=0,\ \sqrt{3}\ x-y+2+3\sqrt{3}=0$

(C) $\sqrt{3}\ x-y-2-3\sqrt{3}=0$

(D) इनमें से कोई नहीं।

30. बिंदु (1, 0) से जाने वाली एवं मूल बिंदु से $\frac{\sqrt{3}}{2}$ की दूरी पर स्थित रेखाओं के समीकरण हैं:

(A) $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0,\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$

(B) $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0,\ \sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$

(C) $x+\sqrt{3}\ y-\sqrt{3}=0,\ x-\sqrt{3}\ y-\sqrt{3}=0$

(D) इनमें से कोई नहीं।

31. रेखाओं $y=mx+c_1$ एवं $y=mx+c_2$ के बीच की दूरी है–

(A) $\frac{c_1-c_2}{\sqrt{m^2+1}}$ (B) $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ (C) $\frac{c_2-c_1}{\sqrt{1+m^2}}$ (D) 0

32. बिंदु (2, 3) से रेखा $y=3x+4$ पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु के निर्देशांक हैं:

(A) $\frac{37}{10},\frac{-1}{10}$ (B) $\frac{-1}{10},\frac{37}{10}$ (C) $\frac{10}{37},-10$ (D) $\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$

33. यदि अक्षों के बीच अंत:खंडित किसी रेखा के भाग का मध्य बिंदु (3,2) है, तो रेखा का समीकरण होगा:

(A) $2x+3y=12$ (B) $3x+2y=12$ (C) $4x-3y=6$ (D) $5x-2y=10$

34. बिंदु (1, 2) से जाने वाली एवं रेखा $y=3x-1$ के समांतर रेखा का समीकरण है:

(A) $y+2=x+1$ (B) $y+2=3(x+1)$

(C) $y-2=3(x-1)$ (D) $y-2=x-1$

35. रेखाओं $x = 0, y = 0, x = 1$ एवं $y = 1$ द्वारा निर्मित वर्ग के विकर्णों के समीकरण हैं:

(A) $y = x;\ \ y + x = 1$ (B) $y = x;s\ \ x + y = 2$

(C) $2y = x;s\ \ y + x = \frac{1}{3}$ (D) $y = 2x;s\ \ y + 2x = 1$

36. एक सरल रेखा को निर्धारित करने के लिए कितने ज्यामितीय प्राचलों की आवश्यकता होती है:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

37. बिंदु (4, 1) क्रमागत रूप से निम्नलिखित दो रूपांतरणों में से गुजरता है:

(i) रेखा $y = x$ पर परावर्तन

(ii) धनात्मक x-अक्ष के साथ 2 इकाई का स्थानांतरण तब बिंदु के अंतिम निर्देशांक हैं:

(A) (4, 3) (B) (3, 4) (C) (1, 4) (D) $\frac{7}{2}, \frac{7}{2}$

38. रेखाओं $4x + 3y + 10 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$ एवं $7x + 24y - 50 = 0$ से समदूरस्थ एक बिंदु के निर्देशांक हैं:

(A) (1, –1) (B) (1, 1) (C) (0, 0) (D) (0, 1)

39. एक रेखा बिंदु (2, 2) से जाती है और रेखा $3x + y = 3$ पर लंब है। रेखा का y-अंतः खंड है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$

40. रेखाओं $3x + 4y + 2 = 0$ एवं $3x + 4y + 5 = 0$ के बीच की दूरी को, रेखा $3x + 4y - 5 = 0$ निम्नलिखित में से किस अनुपात में बाँटती हैं:

(A) 1 : 2 (B) 3 : 7 (C) 2 : 3 (D) 2 : 5

41. एक समबाहु त्रिभुज का केंद्रक मूल बिंदु है और एक भुजा का समीकरण $x + y - 2 = 0$ है। उस त्रिभुज का एक शीर्ष है:

(A) (–1, –1) (B) (2, 2) (C) (–2, –2) (D) (2, –2)

[संकेत: *मान लीजिए कि* ABC समबाहु त्रिभुज है जिसका शीर्ष A (m, k) है और D (α, β), भुजा BC पर स्थित एक बिंदु है। तब $\frac{2\alpha + h}{3} = 0 = \frac{2\beta + k}{3}$ साथ ही, $\alpha + \beta - 2 = 0$ एवं $\frac{k-0}{h-0} \times (-1) = -1$]

प्रश्न संख्या 42 से 47 में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

42. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं, तो सरल रेखा $ax + by + c = 0$ हमेंशा ________ से जायेगी।

43. बिंदु $(1, -2)$ से जाने वाली एवं अक्षों से समान अंत:खंड काटने वाली रेखा का समीकरण ________ है।

44. बिंदु $(3, 2)$ से जाने वाली और रेखा $x - 2y = 3$ के साथ 45° का कोण बनाने वाली रेखाओं के समीकरण ________ हैं।

45. बिंदु $(3, 4)$ एवं $(2, -6)$ रेखा $3x - 4y - 8 = 0$ के ________ पर स्थित है।

46. एक बिंदु इस प्रकार भ्रमण करता है कि बिंदु $(2, -2)$ से इसकी दूरी का वर्ग, संख्यात्मक रूप में, रेखा $5x - 12y = 3$ से उसकी दूरी, के समान है। उसके बिंदु पथ का समीकरण ________ है।

47. अक्षों के बीच अंत:खंडित रेखा $x \sin \theta + y \cos \theta = p$ के मध्य बिंदु का बिंदु पथ ________ है।

बताईए कि प्रश्न संख्या 48 से 56 तक दिये हुए कथन सत्य हैं अथवा असत्य। उत्तर की पुष्टि कीजिए-

48. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षो के निर्देशांक पूर्णांक हैं तो त्रिभुज समबाहु नहीं हो सकता।

49. बिंदु A $(-2, 1)$, B $(0, 5)$, C $(-1, 2)$ संरेख हैं।

50. बिंदु $(a \cos^3\theta, a \sin^3\theta)$ से जाने वाली एवं सरल रेखा $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = a$ पर लंब रेखा का समीकरण $x \cos \theta - y \sin \theta = a \sin 2\theta$ है।

51. सरल रेखा $5x + 4y = 0$, सरल रेखाओं $x + 2y - 10 = 0$ एवं $2x + y + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से जाती है।

52. एक समबाहु त्रिभुज का शीर्ष $(2, 3)$ है और शीर्ष के सम्मुख भुजा का समीकरण $x + y = 2$ है, तो त्रिभुज की शेष दो भुजाएँ $y - 3 = (2 \pm \sqrt{3})(x - 2)$ हैं।

53. बिंदु $(3, 5)$ को, रेखा $4x + y - 1 = 0$ एवं $7x - 3y - 35 = 0$ के प्रतिच्छेद बिंदु से, मिलाने वाली रेखा का समीकरण बिंदु $(0, 0)$ एवं बिन्दु $(8, 34)$ से समदूरस्थ हैं।

54. रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ इस प्रकार भ्रमण करती है कि $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, जहाँ c अचर है। मूल बिंदु से रेखा पर खींचे गये लंब के पाद बिंदु का बिंदुपथ $x^2 + y^2 = c^2$ है।

55. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेणी में है, तो रेखायें $ax + 2y + 1 = 0$, $bx + 3y + 1 = 0$ एवं $cx + 4y + 1 = 0$ संगामी हैं।

56. बिंदुओं (3, –4) एवं (–2, 6) को मिलाने वाली रेखा, बिंदुओं (–3, 6) एवं (9, –18) को मिलाने वाली रेखा पर लंब है।

प्रश्न संख्या 57 से 59 तक स्तंभ C_1 के अंतर्गत दिए हुए प्रश्न स्तंभ C_2 के अंतर्गत दिए हुए उचित उत्तर के साथ मिलान कीजिए –

57.

	स्तंभ C_1		स्तंभ C_2
(a)	बिंदु P एवं Q, रेखा $x + 5y = 13$ पर स्थित हैं और रेखा $12x - 5y + 26 = 0$ से 2 इकाई की दूरी पर स्थित हैं। P एवं Q के निर्देशांक हैं:	(i)	(3, 1), (–7, 11)
(b)	रेखा $4x + 3y - 10 = 0$ से एक इकाई की दूरी पर रेखा $x + y = 4$ पर स्थित बिंदु के निर्देशांक हैं:	(ii)	$-\frac{1}{3},\frac{11}{3}$, $\frac{4}{3},\frac{7}{3}$
(c)	यदि AP = PQ = QB तो A(–2, 5) एवं B (3, 1) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित बिंदु P एवं Q के निर्देशांक हैं:	(iii)	$1,\frac{12}{5}$, $-3,\frac{16}{5}$

58. यदि रेखाएँ $(2x + 3y + 4) + \lambda(6x - y + 12) = 0$ निम्नलिखित प्रतिबंधों को संतुष्ट करती हैं तो λ का मान हैं

	स्तंभ C_1		स्तंभ C_2
(a)	y-अक्ष के समांतर है।	(i)	$\lambda = -\frac{3}{4}$
(b)	$7x + y - 4 = 0$ पर लंब है।	(ii)	$\lambda = -\frac{1}{3}$
(c)	(1, 2) से जाती है।	(iii)	$\lambda = -\frac{17}{41}$
(d)	x-अक्ष के समांतर है।	(iv)	$\lambda = 3$

59. रेखायें $2x - 3y = 0$ एवं $4x - 5y = 2$ कें प्रतिच्छेद बिंदु से जाने वाली तथा निम्नलिखित प्रतिबंध को संतुष्ट करने वाली रेखा का समीकरण है।

स्तंभ C_1	**स्तंभ C_2**
(a) बिंदु (2, 1) से जाने वाली	(i) $2x - y = 4$
(b) रेखा $x + 2y + 1 = 0$ पर लंब है	(ii) $x + y - 5 = 0$
(c) रेखा $3x - 4y + 5 = 0$ के समांतर है	(iii) $x - y - 1 = 0$
(d) अक्षों पर समान रूप से झुकी हुई है	(iv) $3x - 4y - 1 = 0$